

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)

Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц
Направление «Физика»



Спинорные поля вблизи чёрной дыры в пределе большого числа
измерений

Бакалаврская работа студента

----- Костаревой Марии Дмитриевны

Научный руководитель:

----- к. ф.-м. н., асс. Новиков О.О.

Санкт-Петербург

2017

Содержание

1	Введение	3
2	Тетрадный формализм и спиноры	4
3	Уравнение Дирака	6
4	Поведение эффективного потенциала в пределе большого числа измерений	10
5	Коэффициент отражения, случай $E < E_{max}$	11
6	Коэффициент отражения, случаи $E \approx E_{max}$ и $E > E_{max}$	17
7	Заключение	20

1 Введение

В пустом пространстве уравнения Эйнштейна имеют достаточно простой вид:

$$R_{\mu\nu} = 0,$$

однако нахождение точного решения этих нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных задача технически сложная, за исключением случаев с присутствием значительной степени симметрии. Как известно, сферически симметричное решение уравнений Эйнштейна в пустоте хорошо описывает гравитационное поле одиночной статичной чёрной дыры. Это решение Шварцшильда, который первый нашёл его в 1916 году:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2 d\Omega_{d-2}^2, \quad (1)$$

где $d\Omega_{d-2}^2$ — элемент объёма $(d-2)$ -сферы, $f(r) = 1 - \left(\frac{r_H}{r}\right)^{d-3}$, а r_H — радиус горизонта событий. Устремим количество измерений d к бесконечности. Мы рассматриваем этот предел, так как в этом случае приходим к некоторым упрощениям теории. При $d \rightarrow \infty$ гравитационный потенциал $\left(\frac{r_H}{r}\right)^{d-3}$ исчезает, поэтому вне горизонта поле отсутствует. Поле становится локализовано в асимптотически исчезающей области, для которой $r - r_H \lesssim \frac{r_H}{d}$. Сам горизонт при этом представляет собой поверхность с бесконечной кривизной. В итоге получаем, что пространство за горизонтом чёрной дыры можно считать плоским. Поля материи ведут себя как свободные, за исключением нетривиальных граничных условий на горизонте.

Конечно, мы, скорее всего, не живём в пространстве с бесконечной размерностью, но вычисления в этом пределе могут оказаться полезными как для более глубокого понимания имеющихся теорий, так и для возможных упрощений расчётов в 4-, 10- или 11-мерных пространствах. Так, с помощью этого приближения были аналитически рассчитаны квазинормальные моды скалярных и тензорных полей на фоне чёрной дыры в плоском пространстве [1] и в пространстве анти-де Ситтера [2], изучены неустойчивости чёрных струн и других чёрных объектов [3], [4], [5], [6], а также получено аналитическое подтверждение существования в пространстве анти-де Ситтера так

называемых «чёрных капель» [7].

В данной работе мы распространяем этот подход на фермионные поля. А именно, мы рассматриваем безмассовое спинорное поле, взаимодействующее с чёрной дырой Шварцшильда в d -мерном пространстве-времени.

2 Тетрадный формализм и спиноры

В этой главе мы кратко изложим формализм описания спинорных полей в общей теории относительности, следуя [8], [9].

Пусть задано искривлённое d -мерное пространство-время с метрикой $g_{\mu\nu}$. В каждой точке этого дифференциального многообразия можно построить касательное пространство-время Минковского с метрикой η_{ab} :

$$\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, \dots). \quad (2)$$

Отметим, что здесь и далее латинский алфавит (a, b, c, \dots) используется для обозначения индексов, относящихся к касательному пространству-времени Минковского, а греческий $(\mu, \nu, \sigma, \dots)$ — для обозначения индексов в пространстве-времени с метрикой g .

Поле тетрад e_μ^a есть линейный базис, который связывает метрику g с метрикой касательного пространства:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b. \quad (3)$$

Для компонент тетрад e_μ^a и обратных к ним e_a^μ верны следующие соотношения:

$$e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a. \quad (4)$$

С метрикой η_{ab} связана d -мерная алгебра Клиффорда, генераторами которой являются γ -матрицы, удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям:

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab} \hat{I} \quad (5)$$

Для метрики η_{ab} с помощью представления d -мерной алгебры Клиффорда можно построить представление d -мерной лоренцевой алгебры, генераторами

которой назовём

$$\Gamma_{s(ab)} = \frac{1}{2}\Gamma_{ab},$$

где Γ_{ab} — антисимметричное произведение двух γ -матриц.

Соответствующее представление лоренцевой алгебры называется спинорным, а спинором называют элемент $2^{[d/2]}$ -мерного векторного пространства. Генераторы группы Лоренца в спинорном представлении задаются следующим образом:

$$\Gamma_s(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^{ab}\Gamma_{s(ab)}\right) = \exp\left(\frac{1}{4}\sigma^{ab}\Gamma_{ab}\right),$$

где σ^{ab} — матрица инфинитезимального лоренцева поворота.

Спиноры под действием группы Лоренца преобразуются как

$$(\psi')^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta \psi^\beta = \Gamma_s(\Lambda)^\alpha_\beta \psi^\beta.$$

На спинор действует ковариантная производная D_μ :

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} [\gamma^a, \gamma^b] \right) \psi. \quad (6)$$

Здесь $\omega_{\mu ab}$ - спин-связность, задаваемая как

$$\omega_\mu^a{}_b = e_b^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma^a - e_b^\nu \partial_\mu e_\nu^a. \quad (7)$$

В теории поля дираковский спиноры подчиняются уравнению дирака:

$$i\gamma^a D_a \psi = m\psi, \quad (8)$$

где

$$D_a = e_a^\mu \left(\partial_\mu - \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} [\gamma^a, \gamma^b] \right).$$

В пространстве нечётной размерности γ -матрицы образуют полный набор, а в пространстве с d чётным до полного набора добавляют киральный оператор, равный последовательному произведению имеющихся γ -матриц, т.е. $\gamma_{d+1} = \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{d-1}$. За счёт кирального оператора можно различать левые и правые вейлевские спиноры:

$$\frac{1}{2} (1 \pm \gamma_{d+1}) \psi_{L,R} = \psi_{L,R},$$

где знак «+» соответствует выражению для левых спиноров, а знак «−» — для правых. С вейлевскими спинорами связано вейлевское (или киральное) представление γ -матриц, в котором все γ -матрицы внедиагональны.

3 Уравнение Дирака

Эффективный потенциал для дираковских спиноров на фоне чёрной дыры Шварцшильда в конечном числе измерений был рассмотрен в [10], [11]. В этой главе мы воспроизведём этот результат.

Рассмотрим пространство-время с метрикой $g_{\mu\nu}$, в каждой точке которого можно построить касательное пространство-время Минковского с метрикой η_{ab} . В этом касательном пространстве можно ввести тетрады e_μ^a и обратные к ним e_a^μ .

Спинор ψ подчиняется уравнению Дирака (8).

Найдём компоненты спин-связности (7) для метрики Шварцшильда d -мерного пространства-времени. Интервал в нашем пространстве-времени есть (1). Метрический тензор задаётся диагональной матрицей

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(f(r), -\frac{1}{f(r)}, -r^2, -r^2 \sin(\theta), -r^2 \alpha^2(\theta_i), \dots \right).$$

Так как $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b$, тетрады можно задать матрицей

$$e_\mu^a = \text{diag} \left(\sqrt{f(r)}, \frac{1}{\sqrt{f(r)}}, r, r \sin(\theta), \dots \right),$$

и обратной к ней для e_a^μ . Метрика Минковского в касательном пространстве $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, \dots)$.

Найдём ненулевые элементы спин-связности. Для этого преобразуем выражение (7) к виду:

$$\omega_\mu^a{}_b = e_\alpha^a e_b^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \delta_b^a \Gamma_{a\mu}^a, \quad (9)$$

откуда видно, что элементы $\omega_\mu^a{}_a$ равны нулю. Итак, чтобы вычислить компоненты спин-связности, посчитаем компоненты аффинной связности $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, которые задаются выражением

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}).$$

Учтём также, что элементы метрики $g_{\gamma\gamma} = -r^2\alpha^2(\theta_i)$, $\gamma = 2..(d-1)$. Тогда ненулевые компоненты

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \frac{f'}{2f}, & \Gamma_{11}^1 &= -\frac{f'}{2f}, & \Gamma_{00}^1 &= -\frac{ff'}{2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -fr, & \Gamma_{33}^1 &= -fr\sin^2(\theta_1), & \Gamma_{\gamma\gamma}^1 &= -fr\alpha^2(\theta_i), & \Gamma_{1\gamma}^\gamma &= \frac{1}{r}, \gamma = 2..(d-1), \\ \Gamma_{\rho\rho}^2 &= \tilde{\alpha}(\theta_i), & \Gamma_{2\rho}^\rho &= \hat{\alpha}(\theta_i), \rho = 3..(d-1).\end{aligned}\tag{10}$$

Заметим, что компоненты связности только с угловыми индексами выражаются функциями, зависящими только от углов θ_i . Теперь, используя (9) и (10), получим

$$\begin{aligned}\omega_{t10} &= -\frac{f'}{2}, & \omega_{t01} &= \frac{f'}{2}, \\ \omega_{\theta_i12} &= \sqrt{f}, & \omega_{\theta_213} &= \sqrt{f}\sin(\theta_1), & \omega_{\theta_i1\gamma} &= \sqrt{f}\alpha(\theta_i),\end{aligned}\tag{11}$$

а все остальные выражения для компонент спин-связности, содержащих только угловые индексы, зависят только от углов θ_i .

Подставим выражения для спин-связности в левую часть уравнения (8):

$$\begin{aligned}& i\left\{\gamma^0 e_0^\mu \delta_\mu^0 \partial_0 + \gamma^1 e_1^\mu \delta_\mu^1 \partial_1 - \frac{1}{4}\left(\gamma^0 e_0^\mu \delta_\mu^0 \frac{-f'}{2}[\gamma^1, \gamma^0] + \gamma^0 e_0^\mu \delta_\mu^0 \frac{f'}{2}[\gamma^0, \gamma^1] +\right.\right. \\ & \quad \left.+ \gamma^2 e_2^\mu \delta_\mu^2 \sqrt{f}[\gamma^1, \gamma^2] + \gamma^2 e_2^\mu \delta_\mu^2 (-\sqrt{f})[\gamma^2, \gamma^1] +\right. \\ & \quad \left.+ \sum_{i=3}^{d-1} \gamma^i e_i^\mu \delta_\mu^i \sqrt{f}\alpha_i(\theta)[\gamma^1, \gamma^i] + \sum_{i=3}^{d-1} \gamma^i e_i^\mu \delta_\mu^i (-\sqrt{f})\alpha_i(\theta)[\gamma^1, \gamma^i] - \frac{1}{r}\gamma^a \tilde{D}_a\right\}\psi = m\psi\end{aligned}\tag{12}$$

Заметим, что в этом уравнении на спинор действуют два дифференциальных оператора, один из которых зависит только от переменных t и r , а другой — от r и углов θ_i , который мы обозначили \tilde{D}_a . Благодаря разделению переменных спинор можно представить в следующем виде:

$$\psi = \sum_l [\varphi_l^+(t, r)\chi_l^+(\theta_i) + \varphi_l^-(t, r)\chi_l^-(\theta_i)],$$

где φ_l^\pm — некоторые двумерные спиноры, а $\chi_l^\pm(\theta_i)$ — собственные решения уравнения Дирака на $(d-2)$ -сфере: [12]

$$\tilde{\gamma}^a \tilde{D}_a \chi_l^\pm = \pm i \left(l + \frac{d-2}{2} \right) \chi_l^\pm(\theta_i).\tag{13}$$

Учитывая антикоммутационные соотношения гамма-матриц, упростим выражения вида $\gamma^0[\gamma^1, \gamma^0] = -2\gamma^1$, $\gamma^a[\gamma^1, \gamma^a] = 2\gamma^1$, если $a \neq 0$. Также подставим в (12) выражения для тетрад и получим

$$\left\{ \gamma^0 \frac{1}{\sqrt{f}} \partial_0 + \gamma^1 \sqrt{f} \partial_1 - \gamma^1 \left(\frac{f'}{2\sqrt{f}} + \frac{\sqrt{f}}{r} (d-2) \right) - \frac{1}{r} \gamma^a \tilde{D}_a \right\} \psi = m\psi \quad (14)$$

Теперь воспользуемся разделением переменных и учтём (13). Тогда можем записать уравнение Дирака для двумерного спинора, зависящего только от переменных t и r . Возьмём $m = 0$. Тогда получим

$$\gamma^0 \frac{1}{\sqrt{f}} \partial_t \varphi_l + \gamma^1 \sqrt{f} \partial_r \varphi_l - \gamma^1 \left(\frac{f'}{2\sqrt{f}} + \frac{\sqrt{f}}{r} (d-2) \right) \varphi_l - \frac{1}{r} \gamma^2 \left(\pm i \left(l + \frac{d-2}{2} \right) \right) \varphi_l = 0. \quad (15)$$

Теперь, сделав замену

$$\varphi_l = r^{d-2} \sqrt{f} e^{-iD\Omega} \begin{pmatrix} iG(r) \\ F(r) \end{pmatrix},$$

мы можем свести полученное уравнение Дирака к двумерному. В таком случае выберем следующее представление для гамма-матриц:

$$\gamma^0 = \sigma^3 \otimes I, \quad \gamma^1 = i\sigma^2 \otimes I, \quad \gamma^a = i\sigma^1 \otimes \tilde{\gamma}^a,$$

где использованы матрицы Паули

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение (15) примет вид:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (-iD\Omega) r^{d-2} \begin{pmatrix} iG(r) \\ F(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{f} \left[(d-2) r^{d-3} \sqrt{f} \begin{pmatrix} iG(r) \\ F(r) \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. + \frac{f'}{2\sqrt{2}} r^{d-2} \begin{pmatrix} iG(r) \\ F(r) \end{pmatrix} + r^{d-2} \sqrt{f} \begin{pmatrix} iG'(r) \\ F'(r) \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{-f'}{2} - \frac{f}{r} (d-2) \right) r^{d-2} \times \\ & \times \begin{pmatrix} iG(r) \\ F(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(l + \frac{d-2}{2} \right) \frac{\sqrt{f}}{r} r^{d-2} \begin{pmatrix} iG(r) \\ F(r) \end{pmatrix} = 0, \quad (16) \end{aligned}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} iG(r) \\ -F(r) \end{pmatrix} (-iD\Omega) + \begin{pmatrix} F(r) \\ -iG(r) \end{pmatrix} \left[\frac{f}{r}(d-2) + \frac{f'}{2} \right] + f \begin{pmatrix} F'(r) \\ -iG'(r) \end{pmatrix} - \\ & - \frac{f'}{2} \begin{pmatrix} F(r) \\ -iG(r) \end{pmatrix} - \frac{f}{r}(d-2) \begin{pmatrix} F(r) \\ -iG(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(r) \\ iG(r) \end{pmatrix} \left(l + \frac{d-2}{2} \right) \frac{\sqrt{f}}{r} = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

Теперь получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} fF'(r) + \frac{\sqrt{f}}{r} \left(l + \frac{d-2}{2} \right) F = -D\Omega G \\ fG' - \frac{\sqrt{f}}{r} \left(l + \frac{d-2}{2} \right) G = D\Omega F \end{cases}$$

Введём обозначения: $f \frac{d}{dr} \equiv \frac{d}{dr_*}$, $W = \frac{\sqrt{f}}{r} \left(l + \frac{d-2}{2} \right)$. Тогда система примет вид

$$\left(\frac{d}{dr_*} + W \right) F = -D\Omega G \quad (18a)$$

$$\left(\frac{d}{dr_*} - W \right) G = D\Omega F \quad (18b)$$

Домножим уравнение (18a) на $\left(\frac{d}{dr_*} - W \right)$, а уравнение (18b) – на $\left(\frac{d}{dr_*} + W \right)$. Обозначив $V_{1,2} = W^2 \pm \frac{dW}{dr_*}$, запишем

$$\begin{cases} \left(-\frac{d^2}{dr_*^2} + V_1 \right) F = (D\Omega)^2 F \\ \left(-\frac{d^2}{dr_*^2} + V_2 \right) G = (D\Omega)^2 G \end{cases} \quad (19)$$

Подставив выражения для $\frac{d}{dr_*}$ и W , например, в V_1 , получим потенциал

$$V_1 = W^2 + \frac{dW}{dr_*} = f \frac{d}{dr} \left(\frac{\sqrt{f}}{r} \left(l + \frac{d-2}{2} \right) \right) + \frac{f}{r^2} \left(l + \frac{d-2}{2} \right)^2, \quad (20)$$

что согласуется с результатом, полученным в [11]. Отметим также, что, подействовав на решение для F оператором $\left(\frac{d}{dr_*} + W \right)$, мы получаем решение для G , таким образом, решение системы (19) даёт согласованное решение системы (18). Кстати, ситуация аналогична потенциалам-суперпартнерам в суперсимметричной квантовой механике [13].

4 Поведение эффективного потенциала в пределе большого числа измерений

Введем новые обозначения,

$$D = d - 3, \quad \mathcal{R} = \left(\frac{r_H}{r}\right)^D, \quad D\alpha = l + \frac{d-2}{2} \quad (21)$$

Для решения Шварцшильда (1) $f = 1 - \mathcal{R}$.

Проанализируем поведение координаты r_* в пределе большого числа измерений. Вдали от горизонта $r - r_H \gg r_H/D$,

$$\mathcal{R} \simeq 0 \Rightarrow r_* = \int \frac{dr}{1 - \mathcal{R}} \simeq r \quad (22)$$

Область вблизи горизонта $r - r_H \ll r_H/D$ соответствует пределу $\mathcal{R} \rightarrow 1$ и в этом случае как $\frac{dr_*}{dr}$, так и $\frac{dr_*}{d\mathcal{R}}$ расходятся. В промежуточной области $r - r_H \sim r_H/D$ переменная \mathcal{R} пробегает интервал от 0 до 1. При этом,

$$\frac{dr_*}{d\mathcal{R}} = \frac{1}{1 - \mathcal{R}} \frac{dr}{d\mathcal{R}} = -\frac{r_H}{D} \frac{\mathcal{R}^{1/D}}{1 - \mathcal{R}} \rightarrow 0 \quad (23)$$

Таким образом, вся промежуточная область схлопывается в одну точку $r_* = r_H$.

Рассмотрим теперь асимптотику потенциала V_1 . Его можно записать в виде,

$$V_1 = \frac{D\alpha\mathcal{R}^{2/D}}{r_H^2} \left[D\alpha(1 - \mathcal{R}) + \left(\frac{D}{2} + 1\right)\mathcal{R}\sqrt{1 - \mathcal{R}} - \sqrt{1 - \mathcal{R}} \right] \quad (24)$$

Вблизи и вдали горизонта мы получаем в пределе $D \rightarrow +\infty$,

$$r - r_H \gg r_H/D : r_* > r_H, \quad \mathcal{R} \simeq 0, \quad V_1 \rightarrow D^2 \frac{\alpha^2}{r_*^2}, \quad (25)$$

$$r - r_H \ll r_H/D : r_* < r_H, \quad \mathcal{R} \simeq 1, \quad V_1 \rightarrow 0 \quad (26)$$

Важно, что потенциал вдали горизонта оказывается в точности эффективным радиальным потенциалом в плоском пространстве-времени, что соответствует наблюдению о том, что в пределе большого числа измерений гравитация черной дыры сосредотачивается вблизи горизонта.

Рассмотрим теперь промежуточную область $0 < \mathcal{R} < 1$. В промежуточной области потенциал стремится к,

$$V_1 \sim \frac{D^2 \alpha}{r_H^2} \left[\alpha(1 - \mathcal{R}) + \frac{\mathcal{R}}{2} \sqrt{1 - \mathcal{R}} \right] \quad (27)$$

Поскольку $\alpha > \frac{1}{2}$, на рассматриваемом интервале это монотонно убывающая функция. Из этого следует, что максимум V_1 стремится к $D^2 \frac{\alpha^2}{r_H^2}$ и в точке $r_* = r_H$ в потенциал не требуется вводить никаких особенностей.

Сделав замену $\Omega^2 = E$ в (19) мы приходим к следующему уравнению для больших D ,

$$\left[-\frac{1}{D^2} \partial_{r_*}^2 + \tilde{V}(r_*) \right] F = EF, \quad \tilde{V}(r_*) = \begin{cases} 0, & r_* < r_H \\ \frac{\alpha^2}{r_*^2}, & r_* > r_H \end{cases} \quad (28)$$

что можно рассматривать как уравнение Шредингера в квазиклассическом пределе $\hbar = D^{-1} \rightarrow 0$. Благодаря этому мы можем использовать для его решения стандартные квазиклассические методы нерелятивистской квантовой механики, в частности ВКБ асимптотику в главном порядке. Вычисления более высоких порядков потребуют учета зависимости \tilde{V} от D , включая непертурбативные вклады, связанные с \mathcal{R} .

Так как для $r_* > r_H = r_{max}$, $r_* \simeq r$, мы опустим для краткости звездочку в нижеследующих формулах.

5 Коэффициент отражения, случай $E < E_{max}$

Рассмотрим теперь задачу рассеяния волн фермионного поля на черной дыре. Граничные условия для F задаются с помощью коэффициентов отражения и прохождения,

$$F \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} e^{-i\sqrt{E}r} + R(E)e^{i\sqrt{E}r}, \quad F \xrightarrow{r \rightarrow -\infty} T(E)e^{-i\sqrt{E}r}. \quad (29)$$

Наложив эти граничные условия, мы решаем уравнение

$$(-\hbar^2 \partial_r^2 + V(r)) F = EF, \quad (30)$$

причём для $r > r_{max}$ потенциал аппроксимируем выражением $V = \frac{\alpha^2}{r^2}$, т.е.

$$\left(-\hbar^2 \partial_r^2 + \frac{\alpha^2}{r^2}\right) F = EF \quad (31)$$

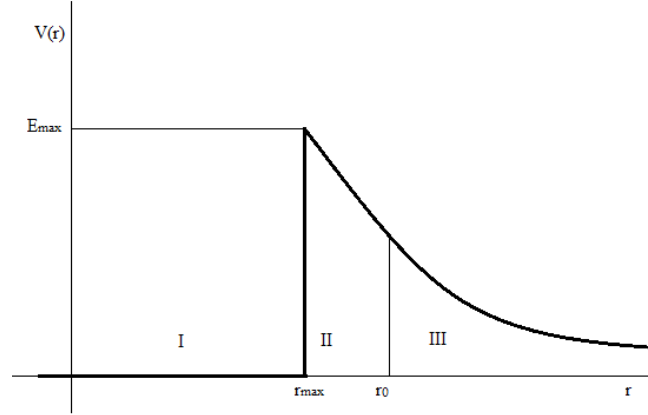


Рис. 1: Вид потенциала $V(r)$.

Для решения уравнения (31) воспользуемся методом ВКБ [14, Гл. 10]. Для этого подставим в наше уравнение решение $F(r)$ в виде

$$F(r) = e^{\frac{i}{\hbar}S(r)} (\psi_0(r) + \hbar\psi_1(r) + \hbar^2\psi_2(r) + \dots). \quad (32)$$

Так как в нашем случае мы используем асимптотическую форму потенциала без учёта зависимости последнего от числа измерений d , мы не ожидаем, что поправки, начиная с первой степени \hbar , будут давать хорошее приближение, поэтому будем искать $F(r) = e^{\frac{i}{\hbar}S(r)}\psi_0(r)$. Подставим (32) в (31):

$$\begin{aligned} & -i\hbar S''(r)(\psi_0 + \hbar\psi_1 + \hbar^2\psi_2 + \dots) + S'^2(r)(\psi_0 + \hbar\psi_1 + \hbar^2\psi_2 + \dots) - \\ & -2i\hbar S'(r)(\psi'_0 + \hbar\psi'_1 + \hbar^2\psi'_2 + \dots) - \hbar^2(\psi''_0 + \hbar\psi''_1 + \hbar^2\psi''_2 + \dots) + \\ & + \frac{\alpha^2}{r^2}(\psi_0 + \hbar\psi_1 + \hbar^2\psi_2 + \dots) = E(\psi_0 + \hbar\psi_1 + \hbar^2\psi_2 + \dots). \end{aligned}$$

В полученном уравнении приравняем выражения, стоящие при одинаковых степенях \hbar . Получим следующую систему для определения функций $S(r)$, $\psi_0(r)$, $\psi_1(r)$ и т.д.:

$$\begin{cases} S'^2\psi_0 + \frac{\alpha^2}{r^2}\psi_0 = E\psi_0 \\ -iS''\psi_0 + S'^2\psi_1 - 2iS'\psi'_0 + \frac{\alpha^2}{r^2}\psi_1 = E\psi_1 \\ -iS''\psi_1 + S'^2\psi_2 - 2iS'\psi'_1 - \psi''_0 + \frac{\alpha^2}{r^2}\psi_2 = E\psi_2 \quad \text{и т.д.} \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы найдём $S(r)$, а из второго - $\psi_0(r)$.
Получим:

$$S(r) = \pm \left(\sqrt{Er^2 - \alpha^2} + \alpha \arctan \frac{\alpha}{\sqrt{Er^2 - \alpha^2}} \right) \quad (33)$$

$$\psi_0 = \frac{Const}{\left(E - \frac{\alpha^2}{r^2}\right)^{1/4}}, \quad (34)$$

тогда

$$F_{WKB} = A \frac{Const}{\left(E - \frac{\alpha^2}{r^2}\right)^{1/4}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left(\sqrt{Er^2 - \alpha^2} + \alpha \arctan \frac{\alpha}{\sqrt{Er^2 - \alpha^2}} \right) \right) + \quad (35)$$

$$+ B \frac{Const}{\left(E - \frac{\alpha^2}{r^2}\right)^{1/4}} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \left(\sqrt{Er^2 - \alpha^2} + \alpha \arctan \frac{\alpha}{\sqrt{Er^2 - \alpha^2}} \right) \right)$$

При $r \rightarrow +\infty$ должны получить $F \rightarrow R(E)e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r} + e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r}$, где $R(E)$ — коэффициент отражения падающей волны. В этом пределе $F_{WKB} \rightarrow \frac{A}{E^{1/4}}e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r} + \frac{B}{E^{1/4}}e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r}$, приравнивая предельные значения, получаем:

$$A = RE^{1/4}, \quad B = E^{1/4} \quad (36)$$

Теперь рассмотрим точку поворота $r = r_0$, где $E = V(r_0)$: выражения в знаменателях вида $E - \frac{\alpha^2}{r^2} = E - V(r)$ в этой точке обращаются в нуль, поэтому ВКБ-асимптотика здесь не работает. Однако возле точки r_0 потенциал представим в виде $V(r) = V(r_0) + V'(r_0)(r - r_0)$, где $V'(r_0) = \beta < 0$. Отметим также, что $\beta = \frac{-2E^{3/2}}{\alpha}$. Подставим в (30) выражение для $V(r)$ возле точки r_0 и получим уравнение:

$$(-\hbar^2 \partial_r^2 + \beta(r - r_0)) F = 0. \quad (37)$$

Решениями этого уравнения являются функции Эйри:

$$F(r) = PAi \left(-\sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}}(r - r_0) \right) + QBi \left(-\sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}}(r - r_0) \right). \quad (38)$$

Обозначим аргумент функций Эйри $-\sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}}(r - r_0) = t$.

Вообще, учитывая найденные A и B ,

$$F_{WKB} = \frac{RE^{1/4}}{(E - \frac{\alpha^2}{r^2})^{1/4}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{r_0}^r \sqrt{|E - V(r)|} dr \right) + \frac{E^{1/4}}{(E - \frac{\alpha^2}{r^2})^{1/4}} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{r_0}^r \sqrt{|E - V(r)|} dr \right) \quad (39)$$

Рассмотрим сначала предел справа: $r \rightarrow r_0+$, при этом из (39)

$$F_{WKB} \rightarrow \frac{E^{1/4}}{(-\beta)^{1/4}(r - r_0)^{1/4}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{2}{3}(-\beta)^{1/2}(r-r_0)^{3/2}} + \frac{RE^{1/4}}{(-\beta)^{1/4}(r - r_0)^{1/4}} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{2}{3}(-\beta)^{1/2}(r-r_0)^{3/2}}, \quad (40)$$

а аргумент функций Эйри в этом случае $t \rightarrow -\infty$. Известны асимптотики функций Эйри для $t \rightarrow -\infty$ [15]:

$$Ai(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}t^{1/4}} \cos \left(\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{1}{4}\pi \right) \\ Bi(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}t^{1/4}} \sin \left(\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{1}{4}\pi \right)$$

Рассмотрим суперпозицию двух функций Эйри:

$$K(Ai(t) - iBi(t)) + H(Ai(t) + iBi(t)) = K \frac{1}{\sqrt{\pi}t^{1/4}} e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{i\frac{2}{3}t^{3/2}} + H \frac{1}{\sqrt{\pi}t^{1/4}} e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\frac{2}{3}t^{3/2}} = \\ = K \frac{1}{\sqrt{\pi}t^{1/4}} e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{i\frac{2}{3}\frac{(-\beta)^{1/2}}{\hbar}(r-r_0)^{3/2}} + H \frac{1}{\sqrt{\pi}t^{1/4}} e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\frac{2}{3}\frac{(-\beta)^{1/2}}{\hbar}(r-r_0)^{3/2}}$$

Сравнив это с выражением для F_{WKB} в этом пределе (40), получаем

$$K = \frac{\sqrt{\pi}E^{1/4}e^{\frac{i\pi}{4}}}{(-\hbar\beta)^{1/6}} \\ H = \frac{\sqrt{\pi}RE^{1/4}e^{-\frac{i\pi}{4}}}{(-\hbar\beta)^{1/6}}, \quad (41)$$

то есть в этом пределе $F_{WKB} = K(Ai(t) - iBi(t)) + H(Ai(t) + iBi(t)) = (K + H)Ai(t) + i(H - K)Bi(t)$, а коэффициенты в (38) $P = K + H$, $Q = i(H - K)$. Отметим также, что коэффициент K обеспечивает сшивание в конечном счёте при $r \rightarrow +\infty$ ВКБ-асимптотики с функцией, содержащей множитель $e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r}$, а коэффициент H — с функцией, содержащей $e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r}$ в том же пределе.

Теперь рассмотрим предел слева: $r \rightarrow r_0 -$. В этом случае аргумент функций Эйри $t \rightarrow +\infty$, поэтому асимптотические выражения для них: [15]

$$\begin{aligned} Ai(t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}} \\ Bi(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-1/4} e^{\frac{2}{3}t^{3/2}} \end{aligned}$$

Решение уравнения (37) при $r \rightarrow r_0 -$ нужно сшить с ВКБ-асимптотикой, которая в этой области есть

$$F_{WKB} = \frac{Const_1}{(-\beta)^{1/4}|r - r_0|^{1/4}} e^{-\frac{2(-\beta)^{1/2}}{2\hbar}|r - r_0|^{3/2}} + \frac{Const_2}{(-\beta)^{1/4}|r - r_0|^{1/4}} e^{\frac{2(-\beta)^{1/2}}{2\hbar}|r - r_0|^{3/2}}, \quad (42)$$

причём, учитывая, что на $+\infty$ имеем сумму двух экспонент, при которых изначально стоят константы A и B , запишем выражения вида (42) для положительно частотной (связь с которой даёт H) и отрицательно частотной (связь с которой даёт K) экспонент. Т.е. получим

$$\begin{aligned} \frac{\bar{A}_+}{(-\beta)^{1/4}|r - r_0|^{1/4}} e^{-\frac{2(-\beta)^{1/2}}{2\hbar}|r - r_0|^{3/2}} + \frac{\bar{A}_-}{(-\beta)^{1/4}|r - r_0|^{1/4}} e^{\frac{2(-\beta)^{1/2}}{2\hbar}|r - r_0|^{3/2}} &= \quad (43) \\ &= H(Ai(t) + iBi(t)) \\ \frac{\bar{B}_+}{(-\beta)^{1/4}|r - r_0|^{1/4}} e^{-\frac{2(-\beta)^{1/2}}{2\hbar}|r - r_0|^{3/2}} + \frac{\bar{B}_-}{(-\beta)^{1/4}|r - r_0|^{1/4}} e^{\frac{2(-\beta)^{1/2}}{2\hbar}|r - r_0|^{3/2}} &= \\ &= K(Ai(t) - iBi(t)) \end{aligned}$$

Приравнивая правые части (43) к суперпозиции асимптотических выражений для $Ai(t)$ и $Bi(t)$, найдём:

$$\begin{aligned} \bar{A}_+ &= \frac{H(\hbar\beta)^{1/6}}{\sqrt{\pi}}, \quad \bar{A}_- = \frac{iH(\hbar\beta)^{1/6}}{2\sqrt{\pi}} \\ \bar{B}_+ &= \frac{K(\hbar\beta)^{1/6}}{\sqrt{\pi}}, \quad \bar{B}_- = \frac{-iK(\hbar\beta)^{1/6}}{2\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (44)$$

Тогда в этой области получим $F_{WKB} = \bar{A}\psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}S} + \bar{B}\psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}S}$, где $\bar{A} = \bar{A}_+ + \bar{B}_+$, а $\bar{B} = \bar{A}_- + \bar{B}_-$.

Наконец, рассмотрим $r \rightarrow -\infty$, а решение при этом $\psi \rightarrow T(E)e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r}$.

Сшиваем решение F_{WKB} с $T(E)e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r}$ в точке r_{max} :

$$\begin{cases} F_{WKB}|_{r_{max}} &= T e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r_{max}} \\ \partial_r F_{WKB}|_{r_{max}} &= -\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}T e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r_{max}} \end{cases} \quad (45)$$

Так как зависимость от R отражена в коэффициенте H , а следовательно, в \bar{A}_{\pm} (см. (41) и (44)), введём $\tilde{A}_{\pm} = \frac{\bar{A}_{\pm}}{R}$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{A}_+ R + \bar{B}_+}{(E - E_{max})^{1/4}} e^{\frac{i}{\hbar}S(r_{max})r_{max}} + \frac{\tilde{A}_- R + \bar{B}_-}{(E - E_{max})^{1/4}} e^{-\frac{i}{\hbar}S(r_{max})r_{max}} = T e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r_{max}} \\ \frac{i}{\hbar}S'(r_{max}) \frac{\tilde{A}_+ R + \bar{B}_+}{(E - E_{max})^{1/4}} e^{\frac{i}{\hbar}S(r_{max})r_{max}} - \frac{i}{\hbar}S'(r_{max}) \frac{\tilde{A}_- R + \bar{B}_-}{(E - E_{max})^{1/4}} e^{-\frac{i}{\hbar}S(r_{max})r_{max}} = \\ = -\frac{i}{\hbar}T\sqrt{E}e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r_{max}} \end{cases} \quad (46)$$

Решая эту систему получим выражение для коэффициента отражения $R_{<}$ в случае $E < E_{max}$:

$$R_{<} = \frac{\bar{B}_+ \left(-\sqrt{E} - S'(r_{max}) \right) e^{\frac{i}{\hbar}S(r_{max})} + \bar{B}_- \left(-\sqrt{E} + S'(r_{max}) \right) e^{-\frac{i}{\hbar}S(r_{max})}}{\left(S'(r_{max}) + \sqrt{E} \right) \tilde{A}_+ e^{\frac{i}{\hbar}S(r_{max})} - \tilde{A}_- e^{-\frac{i}{\hbar}S(r_{max})} \left(S'(r_{max}) - \sqrt{E} \right)}, \quad (47)$$

где константы, входящие в полученное выражение определены в (41), (44). В итоге получаем:

$$R_{<} = \frac{i \left(-\sqrt{E} - S'(r_{max}) \right) e^{\frac{i}{\hbar}S(r_{max})} + 2 \left(-\sqrt{E} + S'(r_{max}) \right) e^{-\frac{i}{\hbar}S(r_{max})}}{\left(S'(r_{max}) + \sqrt{E} \right) e^{\frac{i}{\hbar}S(r_{max})} - 2i \left(S'(r_{max}) - \sqrt{E} \right) e^{-\frac{i}{\hbar}S(r_{max})}} \quad (48)$$

Воспользовавшись (33), получим

$$S(r_{max}) = r_{max}\sqrt{E - E_{max}} + \alpha \arctan \frac{\alpha}{r_{max}\sqrt{E - E_{max}}}, \quad (49)$$

а для производной в точке r_{max} :

$$S'(r_{max}) = \sqrt{E - E_{max}}. \quad (50)$$

Заметим, что экспонента $e^{-\frac{i}{\hbar}S(r_{max})}$ убывает при удалении от точки поворота r_0 , а $e^{\frac{i}{\hbar}S(r_{max})}$ — растёт. В пределе $d \rightarrow +\infty$ убывающая экспонента сильно подавлена по сравнению с растущей, поэтому ей можно пренебречь, а это значит, что $R_{<} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} -i$. Тогда получаем, что $|R_{<}|^2 = 1$ и волна полностью отражается от барьера, что вполне закономерно для предела $\hbar \rightarrow 0$.

6 Коэффициент отражения, случаи $E \approx E_{max}$ и $E > E_{max}$

Обратимся к Рис. 1: при $E \approx E_{max}$ в области III сшиваем ВКБ-решение с $F = R(E)e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r} + e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r}$, справа от точки $r_0 \rightarrow r_{max}$ сшиваем ВКБ-решение с асимптотиками функций Эйри, что уже проделано в Разделе 5, а слева от этой точки сшиваем асимптотики функций Эйри с $F = T(E)e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r}$, причём это делаем аналогично (45):

$$\begin{cases} F|_{r_{max}} &= T e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r_{max}} \\ \partial_r F|_{r_{max}} &= -\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}T e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r_{max}} \end{cases} \quad (51)$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} c_+ Ai\left(-\sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}}(r-r_0)\right) + c_- Bi\left(-\sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}}(r-r_0)\right) = T e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r_{max}} \\ -c_+ \sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}} Ai'\left(-\sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}}(r-r_0)\right) - c_- \sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}} Bi'\left(-\sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}}(r-r_0)\right) = \\ = -\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}T e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r_{max}} \end{cases} \quad (52)$$

Из результатов Раздела 5:

$$c_+ = D + H, \quad c_- = i(H - D),$$

а зависимость от коэффициента отражения R заключается в константе H (41), поэтому найдём, чему она равна из системы (52):

$$H = \frac{D \left[-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E} Ai(t) - \frac{1}{\hbar}\sqrt{E} Bi(t) + \sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}} Ai'(t) - i\sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}} Bi'(t) \right]}{-\sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}} Ai'(t) - \sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}} Bi'(t) + \frac{i}{\hbar}\sqrt{E} Ai(t) - \frac{1}{\hbar}\sqrt{E} Bi(t)}$$

Учтём (41) и для коэффициента отражения при $E \approx E_{max}$ R_{\approx} получим

$$R_{\approx} = i \frac{\frac{1}{\hbar}\sqrt{E} [i Ai(t) + Bi(t)] + \sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}} [-Ai'(t) + i Bi'(t)]}{\sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}} [Ai'(t) + i Bi'(t)] + \frac{1}{\hbar}\sqrt{E} [-i Ai(t) + Bi(t)]} \quad (53)$$

Где $t = -\sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}}(r-r_0)$.

В случае, когда $E > E_{max}$, никаких точек поворота r_0 нет, поэтому мы просто сшиваем ВКБ-решение с $Te^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r_{max}}$, как в (45):

$$\begin{cases} \frac{A}{(E-E_{max})^{1/4}}e^{\frac{i}{\hbar}S(r_{max})} + \frac{B}{(E-E_{max})^{1/4}}e^{-\frac{i}{\hbar}S(r_{max})} = Te^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r_{max}} \\ \frac{i}{\hbar}S'(r_{max})\frac{A}{(E-E_{max})^{1/4}}e^{\frac{i}{\hbar}S(r_{max})} - \frac{i}{\hbar}S'(r_{max})\frac{B}{(E-E_{max})^{1/4}}e^{-\frac{i}{\hbar}S(r_{max})} = \\ = -\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}Te^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{E}r_{max}}, \end{cases} \quad (54)$$

причём, учитывая (36), получим для коэффициента отражения $R_>$ при $E > E_{max}$ следующее выражение:

$$R_> = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}S(r_{max})} \left(-\sqrt{E} + S'(r_{max}) \right)}{e^{\frac{i}{\hbar}S(r_{max})} \left(S'(r_{max}) + \sqrt{E} \right)} \quad (55)$$

Подставим сюда (49) и (50):

$$R_> = \frac{e^{-\frac{2i}{\hbar}(r_{max}\sqrt{E-E_{max}} + \alpha \arctan \frac{\alpha}{r_{max}\sqrt{E-E_{max}}})} \left(-\sqrt{E} + \sqrt{E-E_{max}} \right)}{\sqrt{E-E_{max}} + \sqrt{E}}$$

Сравним предельные значения полученных коэффициентов отражения. Если в R_{\approx} энергию E устремить к $+\infty$, а в $R_>$ $E \rightarrow E_{max}$, то мы должны увидеть, что существует область, где эти выражения дают одинаковые значения.

Рассмотрим (53). $E \rightarrow +\infty$, а $\beta = \frac{-2E^{3/2}}{\alpha}$, т.е. аргумент Эйри $t \rightarrow -\infty$. Воспользовавшись асимптотиками функций Эйри в этом случае, получим

$$\begin{aligned} R_{\approx} &\rightarrow i \frac{\frac{1}{\hbar t^{1/4}}(i\cos(z) - \sin(z)) + e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt[3]{\frac{2}{\alpha\hbar^2}} t^{1/4}(-\sin(z) + i\cos(z))}{\frac{1}{\hbar t^{1/4}}(-\sin(z) - i\cos(z)) + e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt[3]{\frac{2}{\alpha\hbar^2}} t^{1/4}(\sin(z) + i\cos(z))} = \\ &= i \frac{\left(\frac{1}{\hbar t^{1/4}} + e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt[3]{\frac{2}{\alpha\hbar^2}} t^{1/4} \right) i e^{iz}}{\left(-\frac{1}{\hbar t^{1/4}} + e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt[3]{\frac{2}{\alpha\hbar^2}} t^{1/4} \right) i e^{-iz}} = i e^{2iz} \frac{\left(\frac{1}{\hbar t^{1/4}} + e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt[3]{\frac{2}{\alpha\hbar^2}} t^{1/4} \right)}{\left(-\frac{1}{\hbar t^{1/4}} + e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt[3]{\frac{2}{\alpha\hbar^2}} t^{1/4} \right)} \end{aligned} \quad (56)$$

Здесь $z = \frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{-\beta}}{\hbar}(r_{max} - r_0)^{3/2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}E^{3/4}(r_{max} - r_0)^{3/2} - \frac{\pi}{4}$. Рассмотрим это выражение в показателе экспоненты, учитывая, что $E = \frac{\alpha^2}{r_0^2}$:

$$i e^{2iz} = e^{-\frac{i}{3\hbar}2^{5/2}\alpha\left(\frac{r_{max}-r_0}{r_0}\right)^{3/2}} \quad (57)$$

Рассмотрим теперь выражение вне экспоненты:

$$\frac{\frac{1}{\hbar t^{1/4}} + \sqrt[3]{\frac{2}{\alpha \hbar^2}} t^{1/4}}{-\frac{1}{\hbar t^{1/4}} + \sqrt[3]{\frac{2}{\alpha \hbar^2}} t^{1/4}} = \frac{1 + \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{r_{max}}{r_0}}}{1 - \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{r_{max}}{r_0}}} \quad (58)$$

Здесь учтено, что верно следующее:

$$t^{1/4} = \left(-\sqrt[3]{\frac{-\beta}{\hbar^2}} (r - r_0) \right)^{1/4} = \hbar^{-1/6} 2^{1/12} \alpha^{1/6} \left(\frac{r_{max} - r_0}{r_0} \right)^{1/4}.$$

Теперь обратимся к (55). $E \rightarrow E_{max}$, $r_{max} \approx r_0$.

$$R_{>} \rightarrow e^{\frac{-2i}{\hbar} S(r_{max})} \frac{1 + \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{r_{max}}{r_0}}}{1 - \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{r_{max}}{r_0}}}. \quad (59)$$

Здесь выражение вне экспоненты совпадает с (58) с точностью до $r_{max} \approx r_0$ и с учётом (50). В показателе экспоненты стоит функция $S(r_{max})$ (49). Раскладывая её в ряд по $\sqrt{E - E_{max}}$, получим

$$e^{\frac{-2i}{\hbar} S(r_{max})} \approx e^{\frac{-2i}{3\hbar} \alpha r_{max}^3 (E - E_{max})^{3/2}} = e^{-\frac{i}{3\hbar} 2^{5/2} \alpha \left(\frac{r_{max} - r_0}{r_0} \right)^{3/2}} \quad (60)$$

То есть из (56) – (60) видим, что предельные значения для R_{\approx} при $E \rightarrow +\infty$ и для $R_{>}$ при $E \rightarrow E_{max}$ совпадают.

Если же теперь в R_{\approx} энергию E устремить к $-\infty$, а в $R_{<}$ $E \rightarrow E_{max}$, то в таком случае асимптотические выражения снова должны оказаться одинаковыми в некоторой области. Обратимся к R_{\approx} (53). Сейчас $E \rightarrow -\infty$, а $t \rightarrow +\infty$. Учитывая асимптотические выражения для функций Эйри в этом случае, получим, что

$$\begin{aligned} R_{\approx} &\rightarrow \frac{-1 + 2ie^{2\rho} + \left(\frac{2\hbar}{\alpha}\right)^{1/3} t^{1/2} (i - 2e^{2\rho})}{-i + 2e^{2\rho} + \left(\frac{2\hbar}{\alpha}\right)^{1/3} t^{1/2} (-1 - 2ie^{2\rho})} = \\ &= \frac{-1 + i\sqrt{\frac{2(r_0 - r_{max})}{r_0}} + 2e^{2\rho} \left(i - \sqrt{\frac{2(r_0 - r_{max})}{r_0}} \right)}{-i - \sqrt{\frac{2(r_0 - r_{max})}{r_0}} + 2e^{2\rho} \left(1 + i\sqrt{\frac{2(r_0 - r_{max})}{r_0}} \right)}, \end{aligned} \quad (61)$$

где $2\rho = \frac{4}{3}t^{3/2} = \frac{2^{5/2}\alpha}{3\hbar} \left(\frac{r_0 - r_{max}}{r_0} \right)^{3/2}$. Далее, рассмотрим выражение для $R_<$ (48) в интересующем нас пределе $E \rightarrow E_{max}$:

$$R_< = \frac{-1 + i\sqrt{\frac{2(r_0 - r_{max})}{r_0}} + 2e^{-\frac{2i}{\hbar}S(r_{max})} \left(i - \sqrt{\frac{2(r_0 - r_{max})}{r_0}} \right)}{-i - \sqrt{\frac{2(r_0 - r_{max})}{r_0}} + 2e^{-\frac{2i}{\hbar}S(r_{max})} \left(1 + i\sqrt{\frac{2(r_0 - r_{max})}{r_0}} \right)}, \quad (62)$$

где, учитывая асимптотические разложения в показателе экспонент, получим, что $e^{-\frac{2i}{\hbar}S(r_{max})} \xrightarrow{E \rightarrow E_{max}} \exp \left[\frac{2^{5/2}\alpha}{3\hbar} \left(\frac{r_0 - r_{max}}{r_0} \right)^{3/2} \right]$. Глядя на (61), (62), мы видим, что теперь предельные значения для R_\approx при $E \rightarrow -\infty$ и для $R_<$ при $E \rightarrow E_{max}$ также совпадают.

Таким образом, получаем, что асимптотические выражения для коэффициентов отражения согласованы между собой.

7 Заключение

В работе рассмотрено безмассовое фермионное поле вблизи черной дыры в пределе бесконечного числа измерений. После разложения по сферическим гармоникам задача оказывается эквивалентной рассмотрению одномерного уравнения Шрёдингера, для которого предел $d \rightarrow \infty$ соответствует квазиклассической асимптотике. Кроме того в этом пределе эффективный потенциал значительно упрощается: в дальней зоне он соответствует плоскому пространству-времени Минковского, а в ближней равен нулю. Применение метода ВКБ-асимптотик позволило аналитически вычислить коэффициенты отражения для волн фермионного поля, падающих на чёрную дыру. Данные результаты аналогичны полученным в [16] для скалярного поля.

С помощью этого результата возможно сформулировать эффективную модель для фермионных полей вблизи чёрной дыры в пределе бесконечного числа измерений, аналогично рассмотренной в [16] модели скалярных полей. Везде за пределами горизонта пространство-время можно считать плоским, а горизонт представляет собой особую поверхность, на которой заданы гра-

ничные условия, получаемые из (29),

$$\left. \frac{\partial_r \psi}{\psi} \right|_{r=r_H} \sim -iD\sqrt{E} \frac{1 - R(E)e^{2iD\sqrt{E}r_H}}{1 + R(E)e^{2iD\sqrt{E}r_H}} \quad (63)$$

Причем для $E \ll E_{max}$ следует использовать $R_<$, которое в этом пределе стремится к $-i$.

Эта простая эффективная модель может использоваться для приближенного анализа поведения фермионного поля вблизи чёрной дыры в конечно-мерном пространстве-времени. Учет поправок, связанных с конечностью D , осложнён непертурбативными вкладами в метрику и потенциал, пропорциональными \mathcal{R} . Изучение этой проблемы выходит за рамки данной работы.

Список литературы

- [1] R. Emparan and K. Tanabe, “Universal quasinormal modes of large D black holes”, Phys. Rev. D **89** (2014) no.6, 064028 [arXiv:1401.1957 [hep-th]].
- [2] R. Emparan, R. Suzuki and K. Tanabe, “Quasinormal modes of (Anti-)de Sitter black holes in the $1/D$ expansion”, JHEP **1504** (2015) 085 [arXiv:1502.02820 [hep-th]].
- [3] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, “Instability of D-dimensional extremally charged Reissner-Nordstrom(-de Sitter) black holes: Extrapolation to arbitrary D”, Phys. Rev. D **89** (2014) no.2, 024011 [arXiv:1309.7667 [hep-th]].
- [4] R. Emparan, R. Suzuki and K. Tanabe, “Instability of rotating black holes: large D analysis”, JHEP **1406** (2014) 106 [arXiv:1402.6215 [hep-th]].
- [5] K. Tanabe, “Black rings at large D”, JHEP **1602** (2016) 151 [arXiv:1510.02200 [hep-th]].
- [6] R. Emparan, R. Suzuki and K. Tanabe, “Evolution and End Point of the Black String Instability: Large D Solution”, Phys. Rev. Lett. **115** (2015) no.9, 091102 [arXiv:1506.06772 [hep-th]].
- [7] R. Emparan, T. Shiromizu, R. Suzuki, K. Tanabe and T. Tanaka, “Effective theory of Black Holes in the $1/D$ expansion’, JHEP **1506** (2015) 159 [arXiv:1504.06489 [hep-th]].
- [8] R. Aldrovandi, G. Pereira, “Teleparallel Gravity”, Springer (2012)
- [9] T. Ortin, “ Gravitation and Strings”, Cambridge University Press, (2004), 684.
- [10] H. T. Cho, “Dirac quasinormal modes in Schwarzschild black hole space-times,” Phys. Rev. D **68** (2003) 024003 [gr-qc/0303078].
- [11] H. T. Cho, A. S. Cornell, J. Doukas and W. Naylor, “Split fermion quasinormal modes,” Phys. Rev. D **75** (2007) 104005 [hep-th/0701193].

- [12] R. Camporesi and A. Higuchi, “On the Eigen functions of the Dirac operator on spheres and real hyperbolic spaces,” J. Geom. Phys. **20** (1996) 1 [gr-qc/9505009].
- [13] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, “Supersymmetry and quantum mechanics,” Phys. Rept. **251** (1995) 267 [hep-th/9405029].
- [14] C.M. Bender, S.A. Orszag, “Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I. Asymptotic Methods and Perturbation Theory”, Springer (1999)
- [15] [DLMF] NIST Digital Library of Mathematical Functions. <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.14 of 2016-12-21. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, and B. V. Saunders, eds.
- [16] R. Emparan, R. Suzuki and K. Tanabe, “The large D limit of General Relativity,” JHEP **1306** (2013) 009 [arXiv:1302.6382 [hep-th]].